ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ Ι

Ιούνιος 2012

(ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ)

ΘΕΜΑ 2: Για οποιαδήποτε γεγονότα Α, Β, Γ δείξτε ότι ισχύουν:

α) $P(A\cup B\cup \Gamma)=P(A)+P(A'B)+P(A'B'\Gamma)$, β) $P(AB\Gamma)=P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(\Gamma|AB)$, $P(AB)\neq 0$ και γ) $P(A\cup B|\Gamma)\leq P(A|\Gamma)+P(B|\Gamma)$, $P(\Gamma)\neq 0$ (πότε ισχύει η ισότητα;)

ΘΕΜΑ 3: Σε ένα τουρνουά σκάκι οι αντίπαλοι ενός παίκτη χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες, οι μισοί στην κατηγορία Α, οι μισοί από τους υπόλοιπους στην κατηγορία Β και το υπόλοιπο τέταρτο στην κατηγορία Γ. Η πιθανότητα ο παίκτης αυτός να νικήσει κάποιον από την κατηγορία Α είναι 0.3, να νικήσει κάποιον από την κατηγορία Β είναι 0.4 και κάποιον από την κατηγορία Γ είναι 0.5.

α) Βρέστε την πιθανότητα νίκης του παίκτη, όταν παίζει με έναν τυχαίο αντίπαλο.

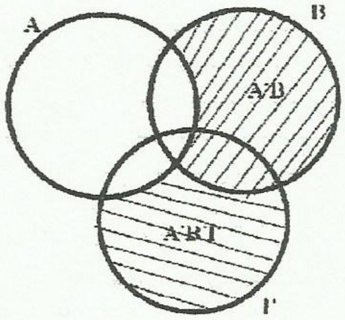
β) Αν γνωρίζουμε ότι κέρδισε ποια η πιθανότητα να νίκησε παίκτη της κατηγορίας Β;

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 2:

α) Αποδεικνύουμε πρώτα ότι $A\cup B\cup \Gamma = A\cup A'B\cup A'B'\Gamma$

Αν ω απλό ενδεχόμενο που ανήκει στο πρώτο μέλος τότε ω ανήκει στο Α, ή στο Β ή στο Γ. Δηλαδή σε κάθε περίπτωση ανήκει σε ένα από τα τρία γεγονότα που η ένωσή τους κάνει το δεύτερο μέλος, άρα ανήκει στο β΄ μέλος. Όμοια ισχύει και αντίστροφα με την παρατήρηση ότι οι τρεις όροι στο δεύτερο μέλος είναι ασυμβίβαστα γεγονότα. Δεύτερος τρόπος για την απόδειξη της ισότητας αυτής είναι με Βέννειο διάγραμμα όπως αυτό στο σχήμα



Παίρνοντας πιθανότητες στα δύο μέλη έχουμε:

$$P(A\cup B\cup \Gamma)=P(A\cup A'B\cup A'B'\Gamma)=P(A)+P(A'B)+P(A'B'\Gamma)$$

Άλλος τρόπος

$$\begin{aligned}&P(A)+P(A'B)+P(A'B'\Gamma)=\\&=P(A)+(P(B)-P(AB))+(P(\Gamma)-P(A\Gamma)-P(B\Gamma)+P(AB\Gamma))=\\&=P(A\cup B\cup \Gamma)\end{aligned}$$

β) $P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(\Gamma|AB)=P(A)\cdot\dfrac{P(AB)}{P(A)}\cdot\dfrac{P(AB\Gamma)}{P(AB)}=P(AB\Gamma)$

Η ισοτητα ισχυει μονο οταν ΑΓ και ΒΓ ξενα συνολο

γ) $P(A\cup B|\Gamma)=\dfrac{P((A\cup B)\Gamma)}{P(\Gamma)}=\dfrac{P(A\Gamma\cup B\Gamma)}{P(\Gamma)}\leq\dfrac{P(A\Gamma)+P(B\Gamma)}{P(\Gamma)}=P(A|\Gamma)+P(B|\Gamma)$

ΘΕΜΑ 3:

Έστω Α, Β, Γ τα γεγονότα ο αντίπαλος ανήκει στην κατηγορία Α, Β ή Γ αντίστοιχα. Από την εκφώνηση έχουμε: $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{1}{4}, P(\Gamma)=\frac{1}{4}$. Αν Ε ο παίκτης πετυχαίνει νίκη, τότε δίνονται επίσης: $P(E|A)=0.3,\ P(E|B)=0.4,\ P(E|\Gamma)=0.5$.

α) Ζητείται:

$$\begin{aligned}P(E)&=P(E|A)P(A)+P(E|B)P(B)+P(E|\Gamma)P(\Gamma)=\\&=0.3\cdot\frac{1}{2}+0.4\cdot\frac{1}{4}+0.5\cdot\frac{1}{4}=\frac{1.5}{4}=\frac{3}{8}\end{aligned}$$

β)

$$P(B|E)=\frac{P(BE)}{P(E)}=\frac{P(B)P(E|B)}{P(E)}=\frac{0.4\cdot(1/4)}{3/8}=\frac{4}{15}$$